Oplossingen hoofdstuk 7

1. X is normaal verdeeld met μ=5 en σ=2. Tussen welke grenzen liggen
   a) $P(Z<z)=0,3 \Rightarrow z_{30}=-0,52$, $P(Z<z)=0,7 \Rightarrow z_{70}=0,52$.
      De ondergrens is $x_{30}=5+z_{30}\cdot 2=5-0,52\cdot 2=3,96$
      De bovengrens is $x_{70}=5+z_{70}\cdot 2=5+0,52\cdot 2=6,04$
   b) $P(Z<z)=0,2 \Rightarrow z_{20}=-0,84$, $P(Z<z)=0,8 \Rightarrow z_{80}=0,84$.
      De ondergrens is $x_{20}=5+z_{20}\cdot 2=5-0,84\cdot 2=3,32$
      De bovengrens is $x_{80}=5+z_{80}\cdot 2=5+0,84\cdot 2=6,68$
   c) $P(Z<z)=0,1 \Rightarrow z_{10}=-1,28$, $P(Z<z)=0,9 \Rightarrow z_{90}=1,28$.
      De ondergrens is $x_{10}=5+z_{10}\cdot 2=5-1,28\cdot 2=2,44$
      De bovengrens is $x_{90}=5+z_{90}\cdot 2=5+1,28\cdot 2=7,56$

2. We zoeken telkens in eerste instantie de z waarden op van deze X- of Y-waarden; vervolgens maken we gebruik van de z waarden, om deze percentages te vinden.
   a. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-1 en z=1?
      Om dit te berekenen moeten we 84,87% verminderen met 15,26%.
      Dat komt overeen met 68,26%.
   b. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-2 en z=2?
      Om dit te berekenen moeten we 97,72% verminderen met 2,28%
      Dat komt overeen met 95,44%.
   c. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-1,5 en z=1,50?
      Om dit te berekenen moeten we 93,32% verminderen met 6,68%
      Dit komt overeen met 86,64%.
   d. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-1 en z=1?
      Om dit te berekenen moeten we 84,87% verminderen met 15,26%.
      Dat komt overeen met 68,26%.
   e. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-2 en z=2?
      Om dit te berekenen moeten we 97,72% verminderen met 2,28%
      Dat komt overeen met 95,44%.
   f. Welk percentage van de metingen z vinden we tussen z=-1,50 en z=1,50?
      Om dit te berekenen moeten we 93,32% verminderen met 6,68%
      Dit komt overeen met 86,64%.
   g. de uitkomsten van a t/m c zijn identiek aan deze van d t/m f.
      Dat komt omdat de afstanden telkens evenver verwijderd zijn, uitgedrukt in sd, t.o.v. het rekenkundig gemiddelde.

3.

a) $P(X<222)=P\left(Z<\frac{222-266}{16}\right)=P(Z<-2,75)=0,0030$

b) $P(246<X<280)=P\left(\frac{246-266}{16}<Z<\frac{280-266}{16}\right)=P(-1,25<Z<0,88)=0,7036$

4.

a)

$P(X>x_{85})=0,15 \Rightarrow P(Z>z_{85})=0,15 \Rightarrow z_{85}=1,04$

$\Rightarrow x_{85}=A=76+1,04\cdot 10=86,4$

b)

$P(X<x_{10})=0,1 \Rightarrow P(Z<z_{10})=0,1 \Rightarrow z_{10}=-1,28$

$\Rightarrow x_{10}=E=76+(-1,28)\cdot 10=63,2$

5. $P(X>720)=P\left(Z>\frac{720-500}{100}\right)=P(Z>2,20)=0,0139$

6. Een enquête over de huishuren in een stad geeft als gemiddelde huishuur 425 euro, met een standaardafwijking van 75 euro. Stel dat de huishuren een normale verdeling volgen. Hoe groot is de kans dat een willekeurige huurder een huur betaalt die tussen de 200 en 250 euro ligt?

   $P(200<X<250)=P\left(\frac{200-425}{75}<Z<\frac{250-425}{75}\right)=P(-3,00<Z<-2,33)=0,0085$

7. Er worden vrouwelijke figuranten gezocht voor een film die zich afspeelt in de middeleeuwen. Het uiterlijk speelt geen rol, maar opdat de kostuums zouden passen zijn ze enkel geïnteresseerd in meisjes tussen 1,60 m en 1,70 m. Uit onze enquête, waaraan 142 meisjes meededen, blijkt dat de lengte van de meisjesstudenten vorig academiejaar, normaal verdeeld is met gemiddelde 168,15 cm en standaardafwijking 5,97 cm. Hoeveel potentiële figuranten zitten er tussen deze 142 meisjes?

   $P(160<X<170)=P\left(\frac{160-168,15}{5,97}<Z<\frac{170-168,15}{5,97}\right)=P(-1,37<Z<0,31)=0,5356$

   Dus het aantal meisjes dat in aanmerking komt is $0,5356\cdot 142\approx 76$

8. Brinkman (2006) formuleerde een aardig vraagstuk. De productie van kippeneieren bij een pluimveehouderij is normaal verdeeld met een gemiddelde van 9 000 eieren per dag en een standaarddeviatie van 5 00 eieren. Hoe groot is, voor een willekeurige dag, de kans dat de productie meer dan 10 000 eieren bedraagt?

Een productie van 10000 eieren situeert zich 2 standaarddeviaties boven het gemiddelde. Dit komt dus overeen met een Z-waarde van 2. Welk is in een standaardnormale verdeling de rechter overschrijdingskans van Z=2? Dit is gelijk aan 2,28%

9. Veronderstel een statisticus zal het examen verbeteren op 120 punten om nadien het cijfer om te zetten naar een cijfer op 20. Uit de gegevens blijkt dat de verdeling van de uitslagen een normale verdeling volgt en dat het gemiddelde op 66 uitkomt en de standaarddeviatie op 12.
A.. Stel dat een bepaalde student 78 behaalde voor dit examen.
Hoeveel procent van de studenten behaalde een nog beter resultaat?
Dit komt overeen met een Z-waarde van +1. Welk is de rechter overschrijdingskans van Z= 1? Deze overschrijdingskans is gelijk aan 16%

B. De docent zal een onderscheiding slechts toekennen aan de 10% beste studenten.
Vanaf welke score zal een onderscheiding toegekend worden?
Deze percentiel 90 komt overeen met een Z-waarde van 1,28. Deze Z-waarde kunnen we omzetten in de score: 66 + 12*1,28 = 81,36.

C. Indien het cijfer op 20 bekomen wordt door het oorspronkelijke gegeven te delen door 6, hoeveel procent van de studenten zal dan een onvoldoende behalen?
Deze score 60 heeft de volgende Z-waarde: (60 – 66)/12 = -0,5.
Welk is de linker overschrijdingskans in een standaardnormale verdeling van Z= -0,5?
Dit is gelijk aan de rechter overschrijdingskans van Z = 0,5. Dit is gelijk aan 31%.

10. In een populatie kinderen zal de IQ-score een normale verdeling volgen met een gemiddelde van IQ100 en standaarddeviatie van IQ15.

A. Kinderen worden als zwakbegaafd beschouwd indien ze een IQ behalen lager dan IQ70. Hoeveel procent van de kinderen zullen als zwakbegaafd beschouwd worden in een grootschalig onderzoek?
Welk is de Z-waarde van IQ70? Z = (70 – 100)/15 = - 2. Welk is de linker overschrijdingskans in een standaardnormale verdeling van Z = -2? Deze is gelijk aan: 2,28%

B. Kinderen met een IQ hoger dan 120 kunnen beschouwd worden als goed begaafd.
Hoeveel procent van de kinderen zal in een grootschalig onderzoek naar voren komen als goed begaafd?
Z-waarde van IQ120 is gelijk aan: (120 – 100)/15 = 1,33. De rechter overschrijdingskans in een standaardnormale verdeling van Z = 1,33 is gelijk aan: 9,18%.

C. Kinderen met een IQ hoger dan 140 achten we super goed begaafd.
Hoeveel procent van de kinderen heeft dergelijk hoog IQ of hoger?

Deze Z-waarde is gelijk aan (140 – 100)/15 = 2,67. De rechter overschrijdingswaarde in de standaardnormale verdeling is gelijk aan: 0,38%.

11. AB Inbev flesjes bier
Hoeveel procent van de flesjes heeft een inhoud van minder dan 25 cl?
A. De overeenkomstige z waarde is (25 – 25,5)/1 = - 0,5
De linkeroverschrijdingskans van deze z waarde is 30,85 procent.
B. Hoeveel procent van de flesjes heeft een inhoud van minder dan 23 cl?
De overeenkomstige z waarde is (23 – 25,5)/1 = - 2,5
De linkeroverschrijdingskans van deze waarde is 0,62 %, hetgeen wil zeggen dat minder dan 1% van de flesjes minder dan 23 cl zal bevatten.

12. Philips lampen gaan lang mee.
Dat wil zeggen dat de standaarddeviatie gelijk is aan 100 uren. Op die manier zal 15,87% van de lampen meer dan 1600 uren branden.
Hoeveel procent van de lampen zal minder dan 1000 uren branden?
De overeenkomstige z waarde is gelijk aan (1000 – 1500)/100 = - 5. Een dergelijke lage z waarde is haast uitgesloten. De kans voor een lamp die minder dan 1000 uren zal branden is kleiner dan 0,0001.

13. Optelsommen
Percentiel 10 komt overeen met z waarde – 1,28; dit komt overeen met 21,16 sommen.
Als volgt berekend: - 1,28 = (X – 25); daaruit volgt dat X is gelijk aan 21,16 sommen.
Percentiel 50 komt overeen met het gemiddelde in een normaalverdeling dus 25 sommen.
De middelste 50 procent van de leerlingen bevinden zich tussen pc25 en pc75.
Deze grenzen komen overeen met de z-waarden -1,675 en 1,675. Om terug te keren naar de oorspronkelijke verdeling moeten we rekening houden met het gemiddelde van 25 sommen en een sd van 3 sommen.
Deze grenzen komen dus overeen met 19,975 en 30,025; dus afgerond tussen 20 en 30 verwachten we de middelste 50% van de observaties.

14. Het milieubesef.
De z waarde die overeenkomt met pc10 is gelijk aan – 1,28; dit komt overeen met een score op deze test van - 0,28. Dus de respondenten die minder dan -0,28 scoren op de test vormen de risicogroep.

15. De proportie van scores tussen de 75 en 125 is gelijk aan 98,76%.

16. Bij benadering zal 16% van de respondenten een onvoldoende halen.

17. In deze situatie verwachten we bij benadering de 90% middelste uitslagen tussen IQ75 en IQ125.

18. Het speciaal onderwijs. BLO in Vlaanderen en in Nederland het MLK onderwijs.
De maximale score om toegelaten te worden tot dit soort speciaal onderwijs, op basis van deze test, is gelijk aan IQ62,40.

19. De logopediste zal studenten kiezen die een score van 0,16 behalen of lager.

20. De VVIT test
In een grote representatieve steekproef zal 97,72% van de respondenten lager of gelijk aan IQ106 scoren.